

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**Расчётно-графическая работа №1**

«Линейное пространство и СЛАУ»

по дисциплине «Математика (Базовый уровень)»

Вариант №5

**Выполнили:**

студент группы Р3110

Гареев Артем,

студент группы P3110

Румянцева Виктория,

Студент группы Р3109

Маллаев Сабур

**Преподаватель:**

Макрогузов Валерий Николаевич

Санкт-Петербург

2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

[ЗАДАНИЕ 1. Координаты вектора в базисе 3](#_Toc119063257)

[1. Текст задания 3](#_Toc119063258)

[2. Решение задания 3](#_Toc119063259)

[ЗАДАНИЕ 2. Координаты вектора в базисе 8](#_Toc119063260)

[1. Текст задания 8](#_Toc119063261)

[2. Решение задания 8](#_Toc119063262)

[ЗАДАНИЕ 3. Линейная оболочка и СЛАУ 12](#_Toc119063263)

[1. Текст задания 12](#_Toc119063264)

[2. Решение задания 12](#_Toc119063265)

[ЗАДАНИЕ 4. Координаты при смене базиса 14](#_Toc119063266)

[1. Текст задания 14](#_Toc119063267)

[2. Решение задания 14](#_Toc119063268)

[ЗАДАНИЕ 5. Решение СЛАУ методом Гаусса 17](#_Toc119063269)

[1. Текст задания 17](#_Toc119063270)

[2. Решение задания 17](#_Toc119063271)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 18](#_Toc119063272)

# ЗАДАНИЕ 1. Координаты вектора в базисе

## Текст задания

Даны две системы линейных алгебраических уравнений:

1. b)

План:

1. Исследуйте системы на совместность/несовместность, определенность/неопределенность на основе теоремы Кронекера-Капелли и следствия из него (о количестве решений).
   1. Для совместной определенной системы (если она есть):
   2. Найдите определитель основной матрицы методом разложения по 3-й строке и затем по 2-му столбцу (без предварительного упрощения элементарными преобразованиями).
2. Решите её, проверьте решение подстановкой.
3. Для неопределенной или несовместной системы (если она есть):
   1. Запишите её как однородную. Найдите базис подпространства, которое задаётся этой системой. Изобразите подпространство решений на графике.
   2. Найдите множество всех решений неопределённой системы, изобразите его на том же графике.

## Решение задания

Теорема Кронекера-Капелли: система линейных алгебраических уравнение совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть. Рассмотрим систему из пункта а).

Получаем, что ранги основной и расширенной матриц совпадают и равны количеству переменных ( n = 3 ), по теореме Кронекера-Капелли это означает, что СЛАУ совместная и определенная.

Рассмотрим систему из пункта b).

Получаем, что ранги основной и расширенной матриц совпадают и не равны количеству переменных ( r = 2 ), по теореме Кронекера-Капелли это означает, что СЛАУ совместная и неопределенная.

1. Рассмотрим совместную и определённую систему .
   1. Нахождение определителя матрицы методом разложения по 3-й строке:

Нахождение определителя матрицы методом разложения по 2-му столбцу:

* 1. Решение системы методом Крамера:

Проверка решения методом подстановки:

1. Рассмотрим совместную и неопределённую систему .
   1. Запишем систему как однородную:

Подпространство решений изображено на графиках на рисунках 1 и 2 соответственно.

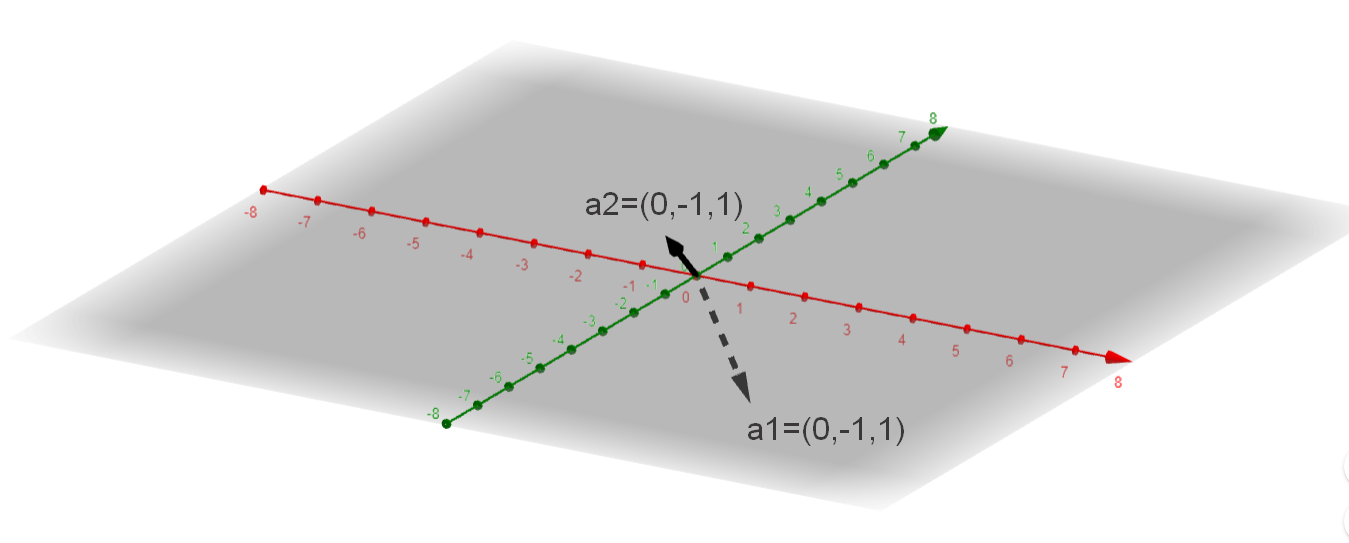


Рисунок 1

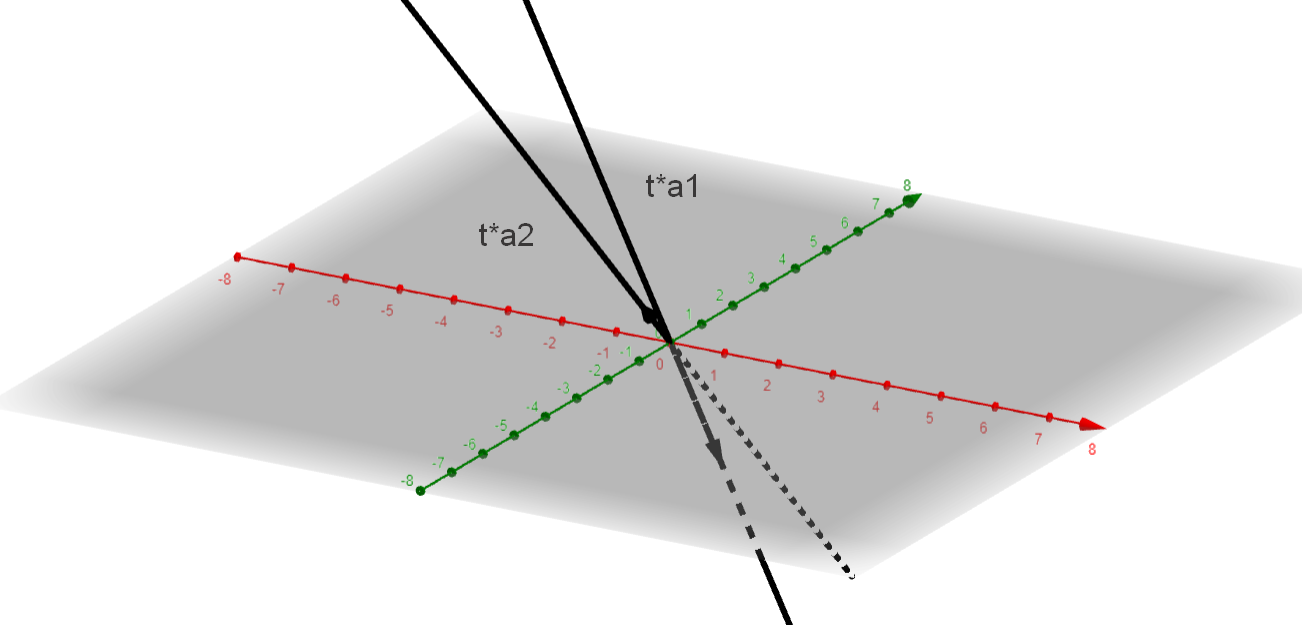


Рисунок 2

* 1. Множество всех решений неопределённой системы изображено на графике на рисунке 3.

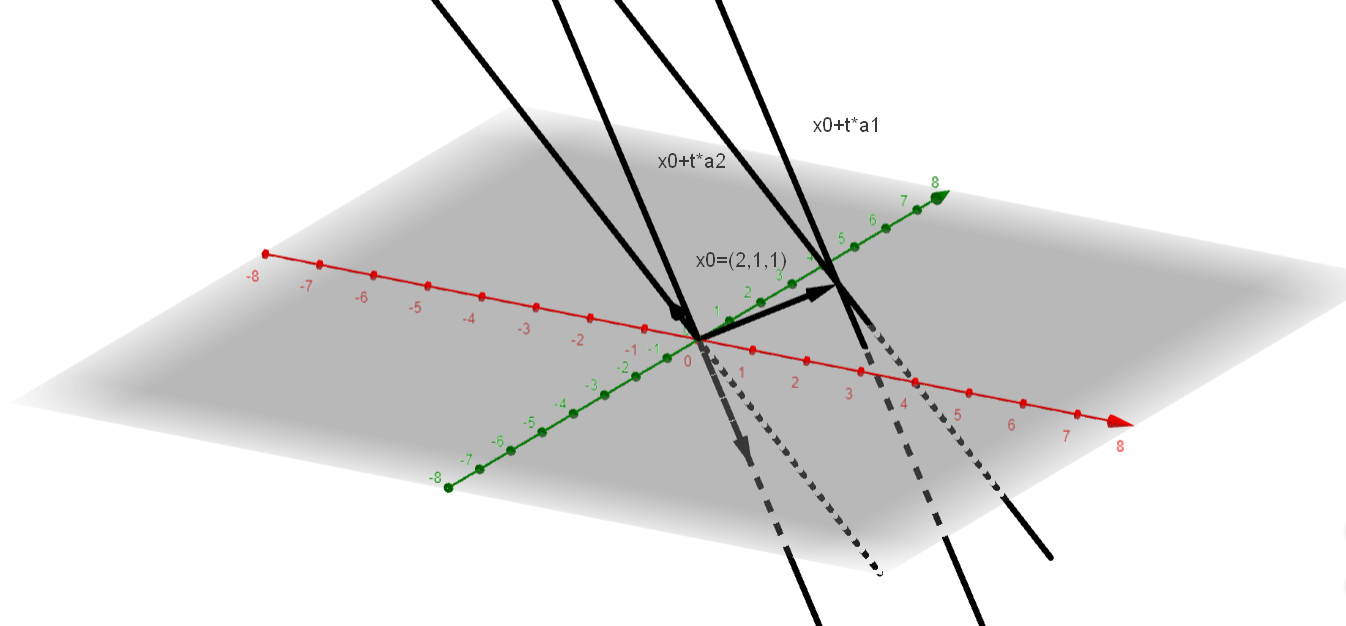


Рисунок 3

# ЗАДАНИЕ 2. Координаты вектора в базисе

## Текст задания

Докажите, что система 𝒜 является базисом в соответствующем линейном пространстве .

Найдите в этом базисе координаты элемента .

1. L – пространство матриц второго порядка.

1. L – пространство многочленов степени не больше четырёх, .

## Решение задания

1. L – пространство второго порядка. Составим линейную комбинацию векторов.

Векторы образуют базис, если этот набор векторов – линейно независимый, чтобы это определить сложим все векторы и приравняем их к нулевому вектору пространства L.

Следующее уравнение эквивалентно СЛАУ.

K – линейная комбинация.

Найдём определитель матрицы коэффициентов.

Найти координаты в базисе 𝒜.

Решение методом Гаусса:

1. L – пространство многочленов степени не больше четырёх.

# ЗАДАНИЕ 3. Линейная оболочка и СЛАУ

## Текст задания

Найдите систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов 𝒜.

## Решение задания

Составим СЛАУ с 4-мя неизвестными из 3-х уравнений:

,

Найдём ФСР системы:

ФСР будет иметь

Рассмотрим в качестве базисных переменных и , как свободные переменные:

⇒

Пусть

Пусть

Составим СЛАУ, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов A:

# ЗАДАНИЕ 4. Координаты при смене базиса

## Текст задания

В линейном пространстве со стандартным базисом , где:

заданы системы векторов и .

1. Покажите, что каждая система образует базис.
2. Проверьте каждый из этих базисов на ортогональность и ортонормированность.
3. Найдите матрицу перехода из базиса в базис .
4. Вектор в базисе имеет координаты . Найдите его координаты .
5. В базисе изобразите векторы базиса и вектор .

## Решение задания

1. Базис:

.

.

1. Ортогональность и ортонормированность и .

.

Из этого следует, что векторы не ортогональные, базис не ортогональный, базис не ортонормированный.

Ортогональность и ортонормированность и .

*.*

Из этого следует, что векторы не ортогональные, базис не ортогональный, базис не ортонормированный.

1. Матрица перехода из базиса в базис .

Чтобы найти матрицу перехода следует выразить векторы базиса через векторы базиса формируется три системы линейных уравнений.

Решим системы уравнений методом подстановки и получим значения переменных:

1. Координаты вектора в базисе .

У нас есть матрица перехода в и координаты в ⇒ умножим матрицу перехода на вектор и получим координаты .

Векторы базиса и вектор изображены на графике на рисунке 4.

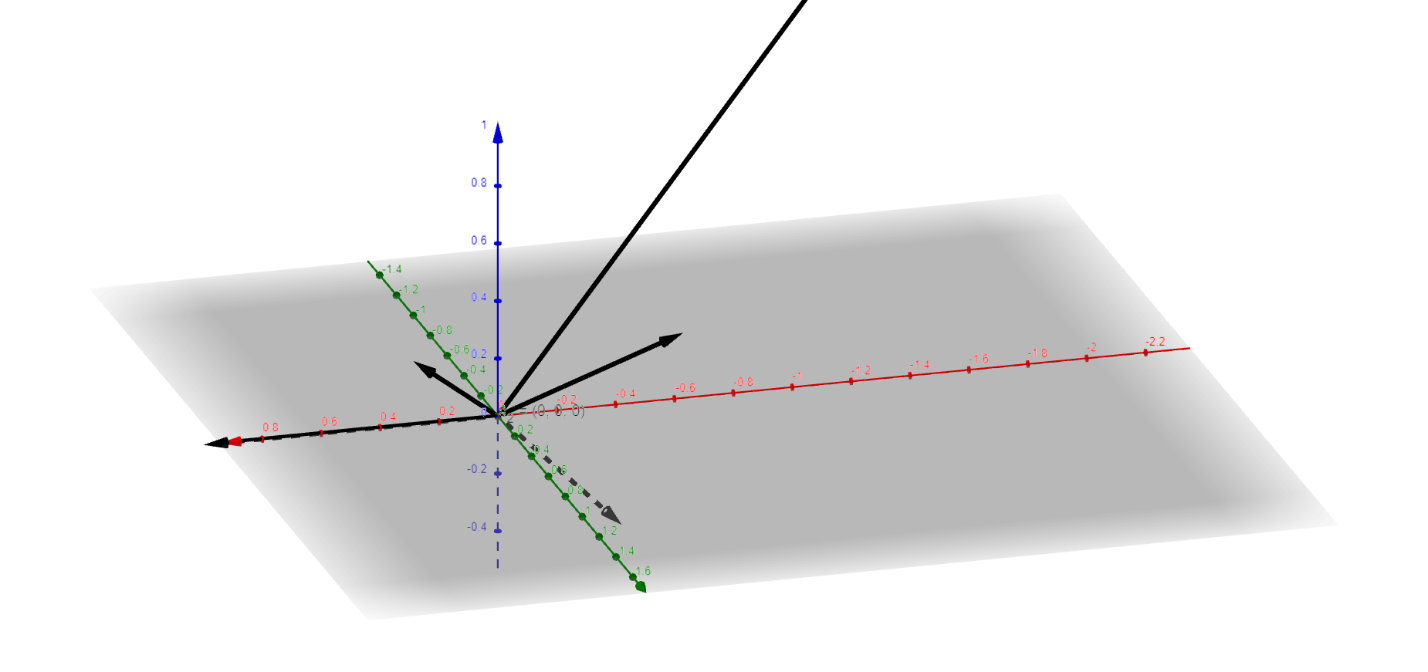


Рисунок 4

# ЗАДАНИЕ 5. Решение СЛАУ методом Гаусса

## Текст задания

Решить СЛАУ методом Гаусса для:

## Решение задания

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках выполнения данной расчётно-графической работы были изучены методы решения прикладных задач и проведено исследование свойств СЛАУ и матриц.

**Оценочный лист**

|  |  |
| --- | --- |
| ФИО | Вклад в работу |
| Гареев Артем | 34% |
| Румянцева Виктория | 33% |
| Маллаев Сабур | 33% |